ÉPREUVE SPÉCIFIQUE
FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Les deux problèmes sont indépendants.

I. Problème I

La partie B, excepté la vérification demandée au début, peut être traitée indépendamment de la partie A.

Dans ce problème le corps de base est le corps des nombres complexes que l'on notera $\mathbb{C}$ et on notera $\mathbb{R}$ le corps des réels. On désigne par $\mathbf{E}$ un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ sur $\mathbb{C}$. On se donne une base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ de $\mathbf{E}$. On note $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$. Id désignera l'application identité de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$. Si u est un élément de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ on note u^i la composée de u, i fois par lui même avec la convention : $u^0 = Id$.

A. Première Partie

1) On prend $n=3$ et on désigne par σ l'élément de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ défini par : $\sigma(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$, $\sigma(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3, \sigma(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1$.

a) Pour tout entier $p \geq 0$ déterminer σ^p.

b) Déterminer les valeurs propres de σ. Pour chacune d'elles, indiquer un vecteur propre associé.

2) On prend encore $n=3$ et on considère un élément u de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ dont la matrice $\mathbf{U}$ sur la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

où a_1, a_2, a_3 sont trois complexes.

a) Montrer que u est une combinaison linéaire de Id, σ et σ^2.

b) En déduire que l'ensemble $\mathscr{C}$ des matrices $\mathbf{U}$ quand (a_1, a_2, a_3) décrit $\mathbb{C}^3$ est une $\mathbb{C}$-algèbre associative, commutative et unitaire pour les opérations usuelles sur les matrices.

c) Montrer que si le déterminant de $\mathbf{U}$ est non nul alors $\mathbf{U}^{-1}$ est dans $\mathscr{C}$.

d) Déterminer les valeurs propres de u. Que remarquez-vous quant à la forme des vecteurs propres de u ?

3) Plus généralement, déterminer les valeurs propres de la matrice carrée d'ordre n quelconque sur $\mathbb{C}$ suivante, dont chaque colonne se déduit de la précédente par une permutation circulaire :

$$(1)\ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_1 & a_n & a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_n & \cdot & \cdot & \cdot & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & \\ a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \\ a_n & a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_1 \end{bmatrix}$$

Pour chaque valeur propre indiquer un vecteur propre associé.

4) Déduire de la question 2) que si trois complexes (x,y,z) vérifient : $x+y+z=0$, alors ils vérifient également la relation : $x^3+y^3+z^3=3xyz$. Caractériser alors géométriquement les triplets (x,y,z) de $\mathbb{C}^3$ solutions de cette dernière équation.

5) On se propose de montrer que le résultat de 2-a) était prévisible. On prend n quelconque et on se donne deux éléments u et v de $\mathscr{L}(\mathbf{E})$ qui commutent (i.e. : $u \circ v = v \circ u$). On suppose que toutes les racines du polynôme caractéristique de v sont simples.

a) Montrer que tout vecteur propre de v est vecteur propre de u. Que dire de u ?

b) En déduire qu'il existe n complexes $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ tels que : $u = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i v^i$.

c) Retrouver le résultat de 2-a).

B. Seconde Partie

On munit **E** d'un produit scalaire hermitien pour lequel $\mathscr{B}$ est une base orthonormée. Ainsi, si $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$ et $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n$ sont deux vecteurs de **E**, on notera $(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y})$ leur produit scalaire qui est donc donné par : $(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$.

Vérifiez que les espaces propres de l'application linéaire u introduite en A-2) sont orthogonaux deux à deux. Ce résultat était en fait prévisible (c .f. 2.d).

1) Soit u un élément de $\mathscr{L}(\mathbf{E})$.

a) Soit **x** un élément de **E**. Montrer que l'application : $y \in \mathbf{E} \rightarrow (\mathbf{x}|u(\mathbf{y})) \in \mathbb{C}$ est une forme linéaire sur **E**. En déduire qu'il existe un unique vecteur de **E**, que l'on notera $u^*(\mathbf{x})$ tel que : $\forall \mathbf{y} \in \mathbf{E}$: $(\mathbf{x}|u(\mathbf{y})) = (u^*(\mathbf{x})|\mathbf{y})$

b) Prouver que l'application de **E** dans **E** qui à **x** associe $u^*(\mathbf{x})$ est linéaire. On la notera u^*.

c) Soient u et v deux éléments de $\mathscr{L}(\mathbf{E})$ et λ un complexe. Expliciter $(u+v)^*$, $(\lambda u)^*$, $(u \circ v)^*$ et montrer que $(u^*)^* = u$. Si **U** désigne la matrice de u sur $\mathscr{B}$ et $\mathbf{U}^*$ celle de u^*, exprimer $\mathbf{U}^*$ en fonction de **U**. L'application de $\mathscr{L}(\mathbf{E})$ dans $\mathscr{L}(\mathbf{E})$ qui à u associe u^* est elle injective ? surjective ?

2) Un endomorphisme u de $\mathscr{L}(\mathbf{E})$ est dit « **normal** » s'il vérifie : $u^* \circ u = u \circ u^*$. Soit u un endomorphisme normal, λ_1 une valeur propre de u et $\mathbf{E}_1$ le sous-espace propre associé. On note $\mathbf{E}_1^{\perp}$ son orthogonal.

a) Montrer que $\mathbf{E}_1$ est stable par u^*.

b) En déduire que $\mathbf{E}_1^{\perp}$ est stable par u.

c) Soit u_1 la restriction de u à $\mathbf{E}_1^{\perp}$ considérée comme une application de $\mathbf{E}_1^{\perp}$ dans $\mathbf{E}_1^{\perp}$. Montrer que λ_1 n'est pas valeur propre de u_1. En déduire que u est diagonalisable. Que dire de ses sous-espaces propres ?

d) En utilisant les résultats de la question A.5) montrer directement que les sous-espaces propres de l'endomorphisme u de **E** dont la matrice sur $\mathscr{B}$ est la matrice **M** donnée par (1) sont deux à deux orthogonaux (on ne calculera pas $u^* \circ u$ ni $u \circ u^*$). On pourra d'abord examiner le cas n=3.

3) Soit u un élément de $\mathscr{A}$(**E**). On suppose qu'il existe un complexe k tel que : $u^* \circ u = k\,Id$. Montrer que k est nécessairement un réel positif ou nul et que u est diagonalisable.

4) Soit r une rotation d'angle θ d'un espace vectoriel Euclidien *réel* orienté de dimension 2. Soit **Q** sa matrice sur une base orthonormée directe de cet espace : Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$? Indiquer ses valeurs propres.

5) On considère la matrice **P** suivante : $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Montrer que **P** est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et déterminer ses valeurs propres. On évitera de calculer son polynôme caractéristique. Préciser la transformation de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice sur la base canonique est **P**.

II. Problème II

La partie B, est indépendante de la partie A.

A. Première partie

Soit $n \geq 1$ un entier. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels **A** suivante.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & . & . \\ 0 & -1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & -1 \\ 0 & . & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Plus précisément, si on désigne par $A_{i,j}$ le coefficient de **A** situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne, pour $n \geq 2$, tous les $A_{i,j}$ sont nuls sauf : $A_{i,i}=2$ (i=1,..,n) et $A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = -1$ (i=1,..,n-1), et pour n=1, **A** est une matrice à une ligne et une colonne dont le seul élément est : $A_{1,1}=2$.

1) Pour chaque $n \geq 1$, on désigne par D_n le déterminant de **A**.

a) Déterminer une relation de récurrence entre D_n, D_{n+1} et D_{n+2} .

b) Déterminer D_n en fonction de n. En déduire que **A** est inversible.

2) Pour chaque k de $\{1,...,n\}$ on pose $\lambda_k = 2(1-\cos(\frac{k\pi}{n+1}))$. En simplifiant l'expression $\sin((p+1)\theta)+\sin((p-1)\theta)-2\sin(p\theta)$, en déduire que les (λ_k) sont les valeurs propres de **A**. Montrer que **A** est diagonalisable sur **R** et indiquer, par leurs composantes sur la base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n)$ de $\mathbf{R}^n$, une base de vecteurs propres de **A**.

3) On se propose de déterminer autrement les valeurs propres de **A**. On désigne par **I** la matrice identité d'ordre n et on pose $\mathbf{B} = \mathbf{A} - 2\mathbf{I}$. Pour chaque $n \geq 1$, on désigne par P_n le polynôme caractéristique de **B**.

a) Déterminer une relation de récurrence entre P_n, P_{n+1} et P_{n+2} .

b) Pour chaque $n \geq 1$ et chaque x appartenant à **R** on désigne par $\mathbf{U}_n(x)$ le vecteur $\begin{pmatrix} P_{n+1}(x) \\ P_n(x) \end{pmatrix}$.

Déterminer une matrice carrée d'ordre 2, **K**, dont les coefficients dépendent éventuellement de x, telle que pour tout x on ait : $\mathbf{U}_n(x) = \mathbf{K}^{n+1} \cdot \mathbf{U}_0$, où $\mathbf{U}_0$ désigne le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Pour x appartenant à l'intervalle]-2,2[, déterminer les valeurs propres $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ de **K** et en déduire une expression simple de $P_n(x)$ en fonction de $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$. Déterminer alors les valeurs propres de **B** puis celles de **A**.

4) On pose $\mathbf{C} = \mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{A}$. Montrer que $\mathbf{C}^p \to 0$ quand $p \to +\infty$.

5) On identifie les vecteurs de $\mathbf{R}^n$ à des matrices à une colonne et n lignes. Soit **u** un vecteur de $\mathbf{R}^n$ donné. On considère la suite $(\mathbf{x}^{(k)})$ de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ définie par :

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{u}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}^{(k)} + \frac{1}{2}\mathbf{g}, \quad k \geq 0$$

où g est un vecteur donné de $\mathbf{R}^n$, connu par ses composantes sur la base de vecteurs propres de **A** obtenue en 2). Montrer que la suite $(\mathbf{x}^{(k)})$ converge et que sa limite est l'unique solution du système : $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{g}$.

Exprimer cette limite sur la base de vecteurs propres de **A** obtenue en 2).

B. Seconde partie

On admettra le résultat suivant :

« Si f est une application continue d'un intervalle fermé $[a,b]$ de **R** à valeurs dans **R**, alors elle est **uniformément** continue. C'est à dire que pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un réel $\eta>0$ tel que pour tout couple (x, y) dans $[a,b]\times[a,b]$ on a l'implication : $\{|x-y|<\eta\} \Rightarrow \{|f(x)-f(y)|<\varepsilon\}$ » .

Soit alors f une application continue de $[0,\pi]$ dans **R**.

1) Montrer qu'il existe une et une seule application y deux fois dérivable sur $[0,\pi]$ à valeurs dans **R** telle que :

$$(1)\ \begin{cases} y''(x) = -f(x), & \forall x \in [0,\pi] \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

2) Soit y une application continue à valeurs réelles, définie sur $[0,\pi]$ et y admettant des dérivées premières et secondes continues. Montrer que pour tout nombre $\varepsilon>0$ il existe un nombre $\eta>0$ tel que pour tout $x\in]0,\pi[$ on ait : $|y(x+h) - 2y(x) + y(x-h) - h^2 y''(x)| \le \varepsilon h^2$, dés que $|h| < \eta$ et que $(x-h)$ et $(x+h)$ sont dans $[0,\pi]$.

3) Soit $n\geq 1$ un entier et y la solution de (1). On pose $h = \dfrac{\pi}{n+1}$ et pour tout i de $\{0,...,n+1\}$ on pose : $x_i = ih$, $y_i = y(x_i)$, $f_i = f(x_i)$. Déduire que pour tout $\varepsilon>0$ il existe N_0 tel que :

$$n \geq N_0 \Rightarrow \left| -y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1} - h^2 f_i \right| \le \varepsilon h^2, \quad \forall i \in \{1,..,n\}$$

C. Troisième Partie

L'entier $n\geq 1$ étant donné, on considère le système d'équations linéaires :

$$(2)\ \begin{cases} -z_{i-1}+2z_i-z_{i+1}=h^2 f_i, & 1\le i\le n \\ z_0=0 \\ z_{n+1}=0 \end{cases}$$

portant sur les inconnues $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, le nombre h ainsi que les nombres $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ prenant les valeurs indiquées à la question B-3) . On se propose d'étudier le lien entre les solutions de (1) et de (2).

1) Justifier que (2) possède une solution unique.

2) On considère le vecteur π de $\mathbf{R}^n$ de composantes : $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ où, pour chaque i, π_i est donné par : $\pi_i = y(x_i) - z_i$. Dans cette relation y est la solution de (1) et $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ celle de (2). On suppose que f possède une dérivée seconde continue sur $[0,\pi]$ et on pose : $m = \underset{x\in[0,\pi]}{Sup} |f''(x)|$. Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ les composantes du vecteur $\mathbf{v} = \mathbf{A}\cdot\pi$. Montrer que : $\underset{k\in\{1,..,n\}}{Sup} |v_k| \le 2\dfrac{h^4}{4!}m$.

3) Déterminer pour chaque k le vecteur $\mathbf{f}_k$ solution de $\mathbf{e}_k = \mathbf{A}\cdot\mathbf{f}_k$, où $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ est la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Vérifier que les coefficients de $\mathbf{A}^{-1}$ sont positifs.

Donner une majoration des composantes du vecteur π. Que peut-on conclure ?

Fin de l'énoncé

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail